Astronomische Mittheilungen
der
Königlichen Sternwarte zu Göttingen.
Neunter Theil.
Herausgegeben von
K. Schwarzschild,
Direktor der Sternwarte.

Untersuchungen zur geometrischen Optik. I.

Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs.

Von
K. Schwarzschild.

Mit 6 Figuren im Text.

(Aus den Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Mathematisch-physikalische Klasse. Neue Folge. Band IV. No. 1.)

Göttingen 1905.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei
(W. Fr. Kaestner).

Untersuchungen zur geometrischen Optik. I.

Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs.

Von

K. Schwarzschild.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 22. Januar 1905.

§ 1. Einleitung.

1. Die gegenwärtige Mitteilung giebt eine Art allgemeiner Einleitung in die Fehlertheorie optischer Systeme mit der Absicht, einerseits dem Leser, der diesem Gegenstand ferner steht, einen gedrängten Ueberblick über das Gebiet zu vermitteln, andrerseits dem Verfasser bei den später folgenden Untersuchungen den Hinweis auf fremde Litteratur zu ersparen. Die Darstellung stützt sich auf die von Hamilton eingeführte „charakteristische Funktion", welche ich mit Herrn Bruns als „Eikonal" bezeichnen werde. Ich möchte dabei zeigen, dass sich auch der praktische rechnende Optiker nicht vor dem Eikonal als etwas Hochtheoretischem zu fürchten braucht, dass man von dem Eikonalbegriff aus vielmehr sehr bequem grade zu den praktisch wichtigsten Sätzen, insbesondere den Seidel'schen Formeln, gelangen kann. Hamilton selbst ist sich dieser Anwendbarkeit seiner Theoreme sehr wohl bewusst gewesen, hat aber die Untersuchung nur für einige ganz einfache Fälle einzelner Linsen bei axialem Objektpunkt wirklich durchgeführt oder wenigstens publiziert. Die Ableitung der allgemeinen Rechenformeln direkt aus dem Eikonal scheint nirgends erfolgt zu sein. Es mag dies zum Teil auch daran gelegen haben, dass man in der sog. Elimination der Zwischenvariabeln Schwierigkeiten fand, welche indessen durch die Einführung der Seidel'schen Variabeln und des Seidel'schen Eikonals (unten Nr. 5. 6) einfach überwunden werden.

Der Vorteil der Anwendung des Eikonals tritt nicht weniger, wie in der Theorie der Fehler 3. Ordnung (auf welche sich die Seidel'schen Formeln beziehn), bei der Untersuchung der Fehler 5. Ordnung zu Tage. Die Aufstellung

vollständiger Ausdrücke für die Fehler 5. Ordnung eines gegebenen optischen Systems würde im Anschluss an die Formeln in § 5 nicht allzu umständlich sein. Die Anzahl der unabhängigen Bildfehler 5. Ordnung ergiebt sich ohne weiteres zu 9. Petzval, der Errechner des ersten Portraitobjektivs, hat für diese Zahl 12 angegeben, woraus hevorzugehen scheint, dass er trotz der Ausdehnung seiner Rechnungen auf Glieder 9. Ordnung den Zusammenhang der Coeffizienten nicht allzu tief durchschaut hat.

Abgesehn von der allgemeinen Uebersicht über die Fehler 5. Ordnung eines optischen Systems in Nr. 11 giebt diese Mitteilung also nur Bekanntes in veränderter Form. Selbstständige Untersuchungen sollen sich später an sie anschliessen.

§ 2. Optische Weglänge und Eikonal.

2. Der Begriff des Eikonals lässt sich folgendermassen erläutern:

Sind zwei Punkte P_0 und P_1 mit den rechtwinkligen Coordinaten x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, innerhalb eines optischen Systems gegeben, so giebt es im allgemeinen einen Lichtstrahl, der vom ersten Punkte zum zweiten führt. Man nenne s die Strecken, die dieser Strahl in den einzelnen Medien vom Brechungsindex n zurücklegt. Dann ist $E = \Sigma ns$ die sog. „optische Weglänge" dieses Strahls, das ist also eine Funktion der Lage der beiden Punkte P_0, P_1. Diese Funktion der Variabeln x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1 heisst Eikonal.

Es gilt nun der bekannte Satz, dass die optische Weglänge für den wirklichen Strahl ein Minimum (schärfer: in Bezug auf kleine Grössen 1. Ordnung stationär) ist, verglichen mit allen benachbarten Verbindungen der beiden Endpunkte. Daraus folgt unmittelbar der weitere Satz: Die vom Punkt P_0 ausgehenden Strahlen bilden während ihres ganzen Verlaufs die Normalen auf den Flächen konstanten Eikonals um P_0. Die Flächen konstanten Eikonals um P_0 sind dabei definiert durch die Gleichung:

$$\Sigma ns = E(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \text{const.}$$

in welcher x_0, y_0, z_0 festgehalten werden, während x, y, z variieren. Es sind diese Flächen nichts anderes als die Wellenflächen der undulatorischen Optik.

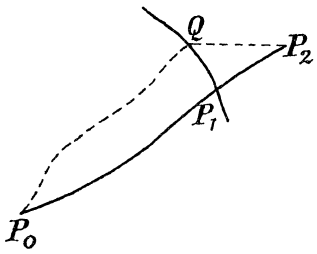

Fig. 1.

Zeichnet man nämlich die durch den Punkt P_1 gehende Fläche konstanten Eikonals und wählt einen Punkt P_2 auf der Normale der Fläche in P_1 und sucht nun nach einem Lichtweg von P_0 nach P_2, der ein Minimum der optischen Weglänge giebt, so ist dies offenbar der Weg über P_1, da die kürzesten Lichtwege nach allen Punkten Q der Fläche konstanten Eikonals gleich lang, der Zusatzweg QP_2 aber am kürzesten wird, wenn Q mit dem Fuss-

punkt der Normalen P_1 zusammenfällt. Demnach ist $P_1 P_2$ der natürliche Lichtweg, womit der obige Satz bewiesen ist.

3. Betrachtet man weiter die Veränderung des Eikonals bei einer unendlich kleinen Verschiebung des Endpunktes $P_1(x_1, y_1, z_1)$ nach dem Punkte $P_1'(x_1+\partial x_1, y_1+\partial y_1, z_1+\partial z_1)$, so lässt sich die Verschiebung zerlegen in eine Strecke $P_1 R$ auf der Fläche konstanten Eikonals bis zum Fusspunkte R des von P_1' auf die Fläche gefällten Lotes und die Strecke δN_1 von R bis P_1' auf dem Lote. Die erste Verschiebung ändert das Eikonal nicht, die zweite ändert es um $n_1 \delta N_1$, wenn n_1 den Brechungsexponenten des Mediums an dieser Stelle bezeichnet. Also im ganzen:

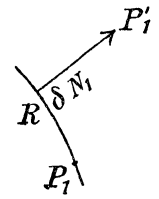

Fig. 2.

$$\delta E = n_1 \delta N_1.$$

Führt man die Richtungskosinus m_1, p_1, q_1 der Normalen auf der Fläche konstanten Eikonals in P_1, d. s. die Richtungskosinus des durch P_1 gehenden Strahls selbst ein, so hat man (die Normale im Sinne der Lichtbewegung genommen) bis auf kleine Grössen höherer Ordnung:

$$\delta N_1 = \delta x_1 m_1 + \delta y_1 p_1 + \delta z_1 q_1.$$

Hiermit:

$$\delta E = n_1(\delta x_1 m_1 + \delta y_1 p_1 + \delta z_1 q_1).$$

Ganz analog würde man bei Festhaltung des Punktes P_1 und Verschiebung des Punktes P_0 erhalten:

$$\delta E = -n_0(\delta x_0 m_0 + \delta y_0 p_0 + \delta z_0 q_0).$$

Verschiebt man also beide Punkte zugleich, so gilt:

$$1) \qquad \delta E = n_1(\delta x_1 m_1 + \delta y_1 p_1 + \delta z_1 q_1) - no\,(\delta x_0 m_0 + \delta y_0 p_0 + \delta z_0 q_0)$$

oder in anderer Schreibweise:

$$2) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x_1} &= n_1 m_1, & \frac{\partial E}{\partial y_1} &= n_1 p_1, & \frac{\partial E}{\partial z_1} &= n_1 q_1, \\ \frac{\partial E}{\partial x_0} &= -n_0 m_0, & \frac{\partial E}{\partial y_0} &= -n_0 p_0, & \frac{\partial E}{\partial z_0} &= -n_0 q_0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen machen die praktische Bedeutung des Eikonalbegriffs aus. Ist nämlich E als Funktion von $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ bekannt, so kann bei gegebenem Ausgangspunkt x_0, y_0, z_0 und gegebener Ausgangsrichtung m_0, p_0, q_0 durch Auflösung der drei letzten Gleichungen der Endpunkt x_1, y_1, z_1 gefunden werden. Es versteht sich, dass eine der drei Gleichungen eine identische Folge aus den beiden andern sein muss, da der Endpunkt jeder beliebige Punkt auf dem durch

$x_0, y_0, z_0, m_0, p_0, q_0$ gegebenen Strahl sein kann[1]). Die drei ersten Gleichungen liefern dann noch für jeden Punkt des Strahls die Strahlrichtung. Die eine Eikonalfunktion beherrscht also die ganze optische Abbildung.

4. Das Winkeleikonal. Das hier definierte Eikonal hat in Praxis die Unbequemlichkeit, dass es Singularitäten bekommt, sobald der Punkt P_1 in die Nähe eines dem Punkte P_0 konjugierten Brennpunktes kommt, eines Punktes, in welchem sich mehrere unendlich benachbarte von P_0 ausgehende Strahlen schneiden.

Zur Vermeidung dieses Uebelstandes soll eine mit E nahe verwandte Grösse eingeführt werden, die wir Winkeleikonal nennen wollen.

Setzt man unter Einführung zweier Constanten c_0 und c_1:

$$\begin{aligned} V = E &- n_1[(x_1 - c_1)m_1 + y_1 p_1 + z_1 q_1] \\ &+ n_0[(x_0 - c_0)m_0 + y_0 p_0 + z_0 q_0], \end{aligned}$$

sodass also V zunächst als eine Funktion sowohl der Punkte x, y, z auf dem Strahl, als der Strahlrichtungen m, p, q erscheint, und variiert nach allen diesen Variabeln, so folgt infolge der Gleichungen (1) oder (2):

$$3)\quad \delta V = -n_1[(x_1 - c_1)\,\delta m_1 + y_1\,\delta p_1 + z_1\,\delta q_1] + n_0[(x_0 - c_0)\,\delta m_0 + y_0\,\delta p_0 + z_0\,\delta q_0].$$

Diese Gleichung besagt, dass V in Wirklichkeit nur eine Funktion der Anfangs- und Endrichtung des Strahls ist und dass für dieselbe gilt:

$$4)\quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial m_1} &= -n_1(x_1 - c_1), & \frac{\partial V}{\partial p_1} &= -n_1 y_1, & \frac{\partial V}{\partial q_1} &= -n_1 z_1 \\ \frac{\partial V}{\partial m_0} &= n_0(x_0 - c_0), & \frac{\partial V}{\partial p_0} &= n_0 y_0, & \frac{\partial V}{\partial q_0} &= n_0 z_0. \end{aligned}$$

Seiner geometrischen Bedeutung nach ist V die optische Weglänge zwischen den Fusspunkten der Normalen, welche man von den auf der x-Axe liegenden Punkten $x = c_0$ und $x = c_1$ resp. auf den Anfangsstrahl und den Endstrahl fällt. Da durch Angabe der Anfangsrichtung und der daraus durch die Brechungen entstehenden Endrichtung im allgemeinen ein bestimmter Strahl festgelegt wird, so erhellt auch hieraus, dass V nur eine Funktion der Strahlrichtungen, der Grössen $m_0, p_0, q_0, m_1, p_1, q_1$ ist.

Die Gleichungen (4) gestatten analog, wie die Gleichungen (2), bei gegebenem Ausgangspunkt und gegebener Ausgangsrichtung zunächst die Endrichtung und

---

1) In der That folgen aus der Gleichung $m^2 + p^2 + q^2 = 1$, der die Richtungskosinus genügen, für das Eikonal die beiden Differentialgleichungen, von denen wir übrigens keinen weiteren Gebrauch machen werden:

$$n_0^2 = \left(\frac{\partial E}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z_0}\right)^2, \quad n_1^2 = \left(\frac{\partial E}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z_1}\right)^2.$$

dann die Endkoordinaten zu berechnen. Singularitäten, wie sie E bei Brennpunkten aufweist, ergeben sich für W, wenn parallele Strahlen wieder in parallele Strahlen abgebildet werden, also bei einem sog. teleskopischen System. Da man es häufig mit Brennpunkten zu tun hat, dagegen meist parallel aus dem Unendlichen kommende Strahlen in konvergente Büschel verwandelt, so ist der Gebrauch von V im allgemeinen dem Gebrauch von E vorzuziehn.

Eine letzte Vereinfachung kann auf Grund der Ueberlegung erfolgen, dass die drei Richtungskosinus nicht unabhängig von einander, sondern durch die Bedingung:

$$m^2 + p^2 + q^2 = 1$$

verbunden sind. Eliminiert man aus V mit Hülfe dieser Bedingung m und bezeichnet die hierdurch entstehende Funktion mit W, so folgt:

$$\frac{\partial W}{\partial p_1} = \frac{\partial V}{\partial p_1} - \frac{\partial V}{\partial m_1} \cdot \frac{p_1}{m_1}, \qquad \frac{\partial W}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1} - \frac{\partial V}{\partial m_1} \frac{q_1}{m_1}$$

oder nach (4):

$$\frac{\partial W}{\partial p_1} = -n_1 \left[y_1 - (x_1 - c_1) \frac{p_1}{m_1} \right], \qquad \frac{\partial W}{\partial q_1} = -n_1 \left[z_1 - (x_1 - c_1) \frac{q_1}{m_1} \right]$$

und entsprechend:

$$\frac{\partial W}{\partial p_0} = n_0 \left[y_0 - (x_0 - c_0) \frac{p_0}{m_0} \right], \qquad \frac{\partial W}{\partial q_0} = n_0 \left[z_0 - (x_0 - c_0) \frac{q_0}{m_0} \right].$$

Die hier rechts stehenden Grössen sind offenbar die Coordinaten des Strahlschnittpunktes mit den Ebenen $x = c_0$ und $x = c_1$. Bezeichnen wir dieselben mit Y_0, Z_0, Y_1, Z_1, so schreiben sich die vorstehenden Gleichungen:

$$5) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial p_1} &= -n_1 Y_1, & \frac{\partial W}{\partial q_1} &= -n_1 Z_1, \\ \frac{\partial W}{\partial p_0} &= n_0 Y_0, & \frac{\partial W}{\partial q_0} &= n_0 z_0. \end{aligned}$$

Diese Funktion W der vier Variabeln p_0, q_0, p_1, q_1 ist es, die Winkeleikonal heissen soll. Ihre Differentialquotienten liefern direkt die Schnittkoordinaten des Strahls mit den beiden Ebenen $x = c_0$ und $x = c_1$, für die man passend Objekt- und Bildebene wählen wird. W als optische Weglänge zwischen den Fusspunkten jener beiden Normalen gefasst hat eine ganz analoge Minimaleigenschaft, wie E. Geht man nämlich vom wirklichen Lichtstrahl zu einem ganz beliebigen Nachbarweg über, so ändert sich (in Bezug auf kleine Grössen 1. Ordnung) E nur in so weit, als die Anfangs- und Endkoordinaten des Strahls verändert werden, da die übrigen Aenderungen des Weges infolge der Minimaleigenschaft von E nichts ausmachen. Es gilt daher die Formel (1) auch bei beliebigen Aenderungen des ganzen Weges und dasselbe folgt dann auch für

Formel (3). Letztere ergiebt aber $\delta V = 0$, sobald man Anfangs- und Endrichtung des Strahles festhält, d. h. V und ebenso W ist ein Minimum (resp. stationär) für den wirklichen Strahlweg, verglichen mit allen anderen Wegen, die dieselbe Anfangs- und Endrichtung haben.

5. Die Seidel'schen Variabeln. Wir wollen zu einer dritten Wahl von Variabeln übergehn. Aehnlich, wie man in der Himmelsmechanik die Bahnelemente einführt, welche ohne Störungen konstant sind, und nachträglich die Aenderungen dieser Elemente infolge der Störungen berechnet, so wollen wir hier Variable benutzen, die bei der Brechung eines Strahls durch ein optisches System konstant sind, falls man sich auf die Gauss'sche Dioptrik, auf die Mitnahme erster Potenzen der als klein betrachteten Grössen p, q, Y, Z beschänkt, und wollen dann die Gleichungen für die Aenderung dieser Variabeln aufstellen, die der strengen Anwendung des Brechungsgesetzes entsprechen. Es stehen diese Variabeln in nächster Beziehung zu denjenigen, welche L. Seidel in seinen grundlegenden Arbeiten (Astron. Nachrichten 1853 und 1856, Bd. 35, 37, 43) eingeführt hat, weshalb sie Seidel'sche Variable heissen sollen.

Wir beschränken uns zur Vereinfachung von jetzt an auf Systeme mit Rotationssymmetrie um eine Axe, die mit der x-Axe zusammenfallen soll.

Eine erste Gruppe solcher Variabler erhält man, wenn man für die Ebenen $x = c_0$ und $x = c_1$ zwei konjugierte Ebenen im Sinne der Gauss'schen Dioptrik wählt — wir wollen sie fortan als Objektebene und Bildebene bezeichnen — und nun die Variabeln benutzt:

$$\frac{Y_0}{l_0}, \frac{Y_1}{l_1}; \quad \frac{Z_0}{l_0}, \frac{Z_1}{l_1}, \tag{6}$$

wobei $\frac{l_1}{l_0}$ das zwischen den beiden Ebenen c_0 und c_1 nach Gauss herrschende Vergrösserungsverhältnis bezeichnet. Diese Grössen werden offenbar durch die Brechung innerhalb der Genauigkeit der Gauss'schen Dioptrik nicht geändert. Es fehlt nun noch ein Ersatz für die Winkelvariabeln. Um denselben zu erhalten, betrachte man ein weiteres Paar konjugierter Ebenen:

$$x = c_0 + M_0 \text{ und } x = c_1 + M_1.$$

Diese Ebenen sollen mit der Eintritts- und Austrittspupille des zu betrachtenden optischen Instrumentes identifiziert werden [1]). Die Schnittkoordinaten des einfallenden und gebrochenen Strahls mit diesen Ebenen seien: Y'_0, Z'_0, Y'_1, Z'_1. Bedeutet $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ das Vergrösserungsverhältnis in diesem zweiten

1) Unter Eintrittspupille versteht man die reelle oder virtuelle Blende, welche vor der Brechung diejenigen Strahlen des von einem axialen Objektpunkt kommenden Strahlenbündels ausschneidet, die durch das ganze Instrument hindurch gelangen. Die Austrittspupille ist das Bild der Eintrittspupille im Sinne der Gauss'schen Dioptrik und hat dieselbe Funktion für die gebrochenen Strahlen.

Ebenenpaar, so hat man als zweite Gruppe von Variabeln der gewünschten Art die Grössen:

$$\frac{Y_0'}{\lambda_0}, \frac{Y_1'}{\lambda_1}, \frac{Z_0'}{\lambda_0}, \frac{Z_1'}{\lambda_1}.$$

Geometrisch erhellt der Zusammenhang der Y', Z' mit den Winkelgrössen p, q:

$$\frac{Y_0'-Y_0}{M_0} = \frac{p_0}{\sqrt{1-p_0^2-q_0^2}}, \quad \frac{Y_1'-Y_1}{M_1} = \frac{p_1}{\sqrt{1-p_1^2-q_1^2}},$$
$$\frac{Z_0'-Z_0}{M_0} = \frac{q_0}{\sqrt{1-p_0^2-q_0^2}}, \quad \frac{Z_1'-Z_1}{M_1} = \frac{q_1}{\sqrt{1-p_1^2-q_1^2}}.$$

Es empfiehlt sich hier indessen noch eine kleine Abänderung. Setzt man die Wurzeln im Nenner auf der rechten Seite überall gleich eins, und definiert neue Grössen Y', Z', durch die Gleichungen:

$$\frac{Y_0'-Y_0}{M_0} = p_0, \quad \frac{Z_0'-Z_0}{M_0} = q_0, \quad \frac{Y_1'-Y_1}{M_1} = p_1, \quad \frac{Z_1'-Z_1}{M_1} = q_1,$$

so werden die Quotienten $\frac{Y_0'}{\lambda_0}$, $\frac{Y_1'}{\lambda_1}$ u. s. w. immer noch innerhalb der Genauigkeit der Gauss'schen Dioptrik bei der Brechung durch das System konstant bleiben, man hat aber den Vorteil, dass die Beziehungen zwischen den alten und den neuen Variablen lineare werden.

Indem wir schliesslich noch den Grössen (6) einen gemeinsamen konstanten Faktor hinzufügen, der die späteren Beziehungen etwas vereinfacht, haben wir das System der neuen Variablen y, z, η, ζ:

$$7)\quad \begin{aligned} y_0 &= \frac{Y_0}{l_0}\cdot\frac{n_0\lambda_0 l_0}{M_0}, & z_0 &= \frac{Z_0}{l_0}\cdot\frac{n_0\lambda_0 l_0}{M_0}, & \eta_0 &= \frac{Y_0}{\lambda_0}+\frac{M_0}{\lambda_0}p_0, & \zeta_0 &= \frac{Z_0}{\lambda_0}+\frac{M_0}{\lambda_0}q_0, \\ y_1 &= \frac{Y_1}{l_1}\cdot\frac{n_0\lambda_0 l_0}{M_0}, & z_1 &= \frac{Z_1}{l_1}\cdot\frac{n_0\lambda_0 l_0}{M_0}, & \eta_1 &= \frac{Y_1}{\lambda_1}+\frac{M_1}{\lambda_1}p_1, & \zeta_1 &= \frac{Z_1}{\lambda_1}+\frac{M_1}{\lambda_1}q_1. \end{aligned}$$

Es sei noch hervorgehoben, dass zwischen den Grössen M_0, M_1, $\frac{l_1}{l_0}$ $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$, die Beziehung besteht:

$$8)\quad \frac{n_0\lambda_0 l_0}{M_0} = \frac{n_1\lambda_1 l_1}{M_1},$$

die den Ausdruck der Sinusbedingung (s. u. Gleichung (16)) innerhalb der Genauigkeit der Gauss'schen Dioptrik enthält.

Die Umkehrung von (7) giebt den Ausdruck der alten Variablen durch die neuen in Rücksicht auf diese Beziehung:

$$p_0 = \frac{\lambda_0}{M_0}\eta_0 - \frac{y_0}{n_0\lambda_0},\quad q_0 = \frac{\lambda_0}{M_0}\zeta_0 - \frac{z_0}{n_0\lambda_0},\quad Y_0 = y_0\cdot\frac{M_0}{n_0\lambda_0},\quad Z_0 = z_0\cdot\frac{M_0}{n_0\lambda_0}$$

7 a)

$$p_1 = \frac{\lambda_1}{M_1}\eta_1 - \frac{y_1}{n_1\lambda_1},\quad q_1 = \frac{\lambda_1}{M_1}\zeta_1 - \frac{z_1}{n_1\lambda_1},\quad Y_1 = y_1\cdot\frac{M_1}{n_1\lambda_1},\quad Z_1 = z_1\cdot\frac{M_1}{n_1\lambda_1}.$$

6. Das zugehörige Eikonal. Eine Funktion vom Charakter des Eikonals ergiebt sich für die neuen Variabeln folgendermassen. Die Gleichungen (5) lassen sich zusammenfassen in die Beziehung:

$$\delta W = -n_1\,(Y_1\delta p_1 + Z_1\delta q_1) + n_0(Y_0\delta p_0 + Z_0\delta q_0).$$

Setzt man hier die neuen Variabeln aus den Gleichungen (7a) ein, so folgt:

$$(9)\quad \delta W = y_0\left(\delta\eta_0 - \frac{M_0}{n_0}\frac{\delta y_0}{\lambda_0^2}\right) + z_0\left(\delta\zeta_0 - \frac{M_0}{n_0}\frac{\delta z_0}{\lambda_0^2}\right) - y_1\left(\delta\eta_1 - \frac{M_1}{n_1}\frac{\delta\eta_1}{\lambda_1^2}\right) - z_1\left(\delta\zeta_1 - \frac{M_1}{n_1}\frac{\delta z_1}{\lambda_1^2}\right).$$

Die Terme rechts sind zum Teil vollständige Differentiale. Man wird hierdurch dazu geführt, an Stelle von W den Ausdruck zu bilden:

$$10)\qquad S = W + \frac{M_0}{n_0}\frac{y_0^2+z_0^2}{2\lambda_0^2} - \frac{M_1}{n_1}\frac{y_1^2+z_1^2}{2\lambda_1^2} + y_0(\eta_1-\eta_0) + z_0(\zeta_1-\zeta_0).$$

Die Variation ergiebt in Rücksicht auf 9):

$$11)\qquad \delta S = \delta y_0(\eta_1-\eta_0) + \delta z_0(\zeta_1-\zeta_0) + \delta\eta_1(y_0-y_1) + \delta\zeta_1(z_0-z_1)$$

oder in anderer Form:

$$12)\qquad \begin{aligned} \eta_1-\eta_0 &= +\frac{\partial S}{\partial y_0}, & y_1-y_0 &= -\frac{\partial S}{\partial \eta_1} \\ \zeta_1-\zeta_0 &= +\frac{\partial S}{\partial z_0}, & z_1-z_0 &= -\frac{\partial S}{\partial \zeta_1}. \end{aligned}$$

S ist also eine Funktion der vier Variabeln $y_0, z_0, \eta_1, \zeta_1$, deren Differentialquotienten unmittelbar die Verschiebungen der Schnittpunktkoordinaten des Strahls gegen die aus der Gaussschen Dioptrik folgenden Werte angeben. Sie soll als Seidelsches Eikonal bezeichnet werden.

§. 3. Stigmatische Punktepaare und Sinusbedingung.

7. Die Existenz des Eikonals hat die Gültigkeit gewisser Reciprozitätssätze zwischen den Verschiebungen in unsern beiden Ebenenpaaren zur Folge, deren wichtigster Spezialfall sich in der sogenannten Sinusbedingung ausspricht.

Hält man η_1 und ζ_1 fest und lässt y_0 und z_0 sich ändern, so folgt aus (12):

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_0} - 1 = -\frac{\partial^2 S}{\partial \eta_1 \partial y_0}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial z_0} - 1 = -\frac{\partial^2 S}{\partial \zeta_1 \partial z_0},$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial z_0} = -\frac{\partial^2 S}{\partial \eta_1 \partial z_0}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial y_0} = -\frac{\partial^2 S}{\partial \zeta_1 \partial y_0}.$$

Hält man andrerseits y_0 und z_0 fest und lässt η_1 und ζ_1 variieren, so erhält man:

$$1 - \frac{\partial \eta_0}{\partial \eta_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial y_0 \partial \eta_1}, \qquad 1 - \frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial z_0 \partial \zeta_1},$$

$$-\frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial y_0 \partial \zeta_1}, \qquad -\frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial z_0 \partial \eta_1}.$$

Damit:

13) $$\frac{\partial y_1}{\partial y_0} = \frac{\partial \eta_0}{\partial \eta_1}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial z_0} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_1}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial z_0} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta_1}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y_0} = \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta_1}.$$

Nachdem diese Reciprozitäten vorausgeschickt sind, betrachte man zunächst ein Paar stigmatischer Punkte, d. h. Punkte von solcher Beschaffenheit, dass alle von dem einen ausgehende Strahlen sich in dem andern schneiden. Sollen insbesondere die Mitten unsrer Objekt- und Bildebene ein solches stigmatisches Punktepaar bilden, so muss aus $y_0 = z_0 = 0$ auch immer $y_1 = z_0 = 0$ folgen, welche Werte auch η_1 und ζ_1 haben mögen, welchen Weg der Strahl vom Punkt $y_0 = z_0 = 0$ aus nehmen mag. Für das Seidel'sche Eikonal ergiebt sich damit die Bedingung stigmatischer Punktepaare:

14) $$\frac{\partial S}{\partial \eta_1} = \frac{\partial S}{\partial \zeta_1} = 0$$

für $y_0 = z_0 = 0$ und beliebige Werte von η_1 und ζ_1. Man fordere jetzt weiter die scharfe Abbildung zweier unendlicher kleiner senkrecht zur x-Axe stehender Flächenelemente in der Nachbarschaft der stigmatischen Punkte. Hiermit ist gemeint, dass die Beziehungen der Gauss'schen Dioptrik $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$ für unendlich kleines y_0 und z_0 bis auf unendlich kleines höherer Ordnung erfüllt sein sollen, oder schärfer, daß:

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_0} = \frac{\partial z_1}{\partial z_0} = 1, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial z_0} = \frac{\partial z_1}{\partial y_0} = 0$$

gelten soll und zwar für $y_0 = z_0 = 0$ und beliebige Werte von η_1 und ζ_1. Damit liefern die Reziprozitäten (13):

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_1} = 1, \qquad \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta_1} = 0$$

wiederum für alle Werte von η_1 und ζ_1 und für $y_0 = z_0 = 0$, d. h. für alle Strahlen, die von unserem einen stigmatisehen Punkte ausgehn und somit in

dem andern zusammenlaufen. Beachtet man, dass wegen der Rotationssymmetrie zu dem einfallenden Axialstrahl $\eta_0 = \zeta_0 = 0$ der austretende Axialstrahl $\eta_1 = \zeta_1 = 0$ gehört, so erhält man durch Integration dieser Gleichungen:

$$\eta_0 = \eta_1, \qquad \zeta_0 = \zeta_1. \tag{15}$$

In Worten: die Bedingung für die scharfe Abbildung zweier unendlich kleiner achsensenkrechter Flächenelemente um die zwei stigmatischen Punkte $y_0 = z_0 = 0$ und $y_1 = z_1 = 0$ besteht in der Gleichheit der Coordinaten η und ζ für die entsprechenden Strahlen der beiden von den stigmatischen Punkten ausgehenden Strahlenbüschel.

Führt man die Winkelkoordinaten p, q nach (7a) ein unter Beachtung, dass für $y = z = 0$ auch $Y = Z = 0$ folgt, so findet man statt (15) die Gleichungen:

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{q_1}{q_0} = \frac{n_0 l_0}{n_1 l_1}. \tag{16}$$

Da p und q gleich den Sinus der Strahlneigungen gegen die Y- und Z-Coordinatenebenen sind, so erklärt sich die Bezeichnung dieser Forderung konstanten Sinusverhältnisses in den zu den stigmatischen Punkten gehörigen Strahlbüscheln als einer „Sinusbedingung“.

Der rechnerische Wert der Sinusbedingung besteht darin, dass sie gestattet, aus dem Verhalten der leichter zu verfolgenden die Axe schneidenden Strahlen einen Schluss auf die Abbildung durch Strahlen zu ziehen, welche in geringer Distanz windschief zur Axe verlaufen.

Ein Punktepaar, welches stigmatisch ist und in welchem ausserdem die Sinusbedingung erfüllt ist, wird von Abbe ein aplanatisches Punktepaar genannt.

§. 4. Die Reihenentwicklung des Eikonals. Die Fehler dritter und fünfter Ordnung eines optischen Systems.

8. Da man bei der strengen Verfolgung eines Strahls durch ein optisches System schon bei wenigen brechenden Flächen jeden Ueberblick verliert, so gründet sich die Theorie der optischen Instrumente fast ganz auf Reihenentwicklungen, und zwar entwickelt man nach Potenzen der Grössen Y, Z, p, q oder auch y, z, η, ζ, indem man dieselben als klein voraussetzt. Die Convergenz dieser Reihenentwicklungen ist in den meisten Fällen der Praxis so gut, dass wenige Glieder entweder schon ein hinreichend exaktes Resultat oder doch eine gute Annäherung geben, von der aus durch Differentialmethoden weiter gegangen werden kann.

Wir halten die Beschränkung auf zur x-Axe rotationssymmetrische Instru-

mente fest. Dann sieht man unmittelbar, dass in der Entwicklung des Winkeleikonals W nach Potenzen von p und q nur die ganzen Potenzen der drei Grössen:

$$p_0^2+q_0^2, \quad p_1^2+q_1^2, \quad p_0p_1+q_0q_1,$$

insbesondere also nur Glieder grader Ordnung, vorkommen werden. Ebenso wird die Entwicklung des Seidel'schen Eikonals nach aufsteigenden Potenzen der Grössen:

$$17) \qquad R_0 = y_0^2+z_0^2 \qquad \varrho_1 = \eta_1^2+\zeta_1^2, \qquad \varkappa_{01} = y_0\eta_1+z_0\zeta_1$$

fortschreiten.

Bleiben wir zunächst bei dem Winkeleikonal stehen und zerlegen dasselbe in Teile, welche den verschiedenen Ordnungen der Glieder in Bezug auf Potenzen von p und q entsprechen:

$$W = W^2+W^4+W^6+\ldots$$

so kann man sich in erster Linie auf W^2 beschränken und die höheren Terme vernachlässigen. Dann erhält man nach (5) lineare Beziehungen zwischen den Grössen p, q, Y, Z. Der Inhalt dieser linearen Beziehungen bildet die Gauss-sche Dioptrik, deren Ableitung auf diesem Wege hier indessen nicht wiederholt werden soll. Nimmt man zweitens W^4 mit, so erhält man nach (5) Korrektionen 3. Ordnung in den p, q zu den Gauss'schen Werten der Coordinaten. Die hieraus entspringende Theorie der „Fehler dritter Ordnung" bildet das hauptsächlichste Kapitel der Theorie der optischen Instrumente über die Gauss'sche Theorie hinaus. Die Berücksichtigung von W^6 ergiebt Fehler 5. Ordnung u. s. f.

Geht man jetzt auf das Seidel'sche Eikonal über, so kann dessen Entwicklung keine Glieder zweiter Ordnung enthalten, weil innerhalb dieser Genauigkeit in den Gleichungen (12) nach Gauss $y_0 = y_1$, $\eta_0 = \eta_1$ u. s. w. und damit $S = 0$ folgt. Die Entwicklung lautet also:

$$S = S^4+S^6+\ldots$$

Die Berücksichtigung von S^4 allein giebt wieder die Theorie der Fehler 3. Ordnung, die von S^6 die Fehler 5. Ordnung u. s. w.

9. Die 5 Fehler dritter Ordnung eines optischen Systems. Unter Benutzung der Bezeichnungen (17) lautet der allgemeine Ausdruck von S^4:

$$18) \qquad S^4 = -\frac{A}{4}R_0^2-\frac{B}{4}\varrho_1^2-C\varkappa_{01}^2-\frac{D}{2}R_0\varrho_1+ER_0\varkappa_{01}+F\varrho_0\varkappa_{01}$$

wobei die $A \ldots F$ willkürliche Constante sind und die Vorzeichen und Zahlenfaktoren in Rücksicht auf die spätere Bequemlichkeit gewählt sind.

Führt man die Differentiationen gemäss (12) aus und legt zur Vereinfachung den Objektpunkt in die $x-y$-Ebene, sodass $z_0 = 0$ wird, so findet man:

$$19)\quad \begin{aligned} y_1 - y_0 &= y_0\,[2Cy_0\eta_1 - Ey_0^2 - F(\eta_1^2+\zeta_1^2)] + \eta_1\,[B(\eta_1^2+\zeta_1^2) + Dy_0^2 - 2Fy_0\eta_1] \\ z_1 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \zeta_1\,[B(\eta_1^2+\zeta_1^2) + Dy_0^2 - 2Fy_0\eta_1] \end{aligned}$$

Da das Glied mit A weggefallen ist, so bleiben im ganzen fünf verschiedene Fehler 3. Ordnung eines optischen Systems möglich entsprechend den 5 Coeffizienten B, C, D, E, F der Eikonalentwicklung. Wir isolieren die einzelnen Fehler, indem wir jeweils alle Coeffizienten bis auf einen gleich null setzen. Es empfiehlt sich dabei:

$$20)\qquad \eta_1 = \sigma\cos\varphi, \qquad \zeta_1 = \sigma\sin\varphi$$

zu setzen und die sog. „Aberrationskurven" zu betrachten, die der Punkt y_1, z_1 durchläuft, wenn man σ konstant hält und φ den Umkreis durchlaufen lässt. Es sind dies also die Curven, welche auf der Bildebene ausgeschnitten werden durch die Strahlen eines Kegelmantels, der den Objektpunkt zur Spitze hat und nach der Brechung in einem Kreis vom Radius σ die Austrittspupille (die Ebene, in welcher wir η_1, ζ_1 zählen) durchsetzt. Da nahe $\eta_0 = \eta_1$, $\zeta_0 = \zeta_1$, so ist auch der Schnitt dieses Kegelmantels mit der Eintrittspupille nahe ein Kreis.

So ergiebt sich der Reihe nach, indem man noch zur Abkürzung die Verschiebungen von y_1 und z_1 durch die einzelnen Fehler mit Δy_1 und Δz_1 bezeichnet:

$$21)\quad \text{a) } B \gtrless 0 \qquad \begin{aligned} \Delta y_1 &= B\sigma^3\cos\varphi, \\ \Delta z_1 &= B\sigma^3\sin\varphi. \end{aligned}$$

Die Aberrationskurven bilden konzentrische Kreise um den Gauss'schen Bildpunkt ($y_1 = y_0$), deren Radien mit der dritten Potenz der Oeffnung des Instruments wachsen, von der Lage des Objekts, der Stelle im Gesichtsfeld, aber unabhängig sind. Man nennt diesen Fehler „sphärische Aberration".

$$22)\quad \text{b) } E \gtrless 0 \qquad \Delta y_1 = -Ey_0^3, \qquad \Delta z_1 = 0.$$

Da η_1 und ζ_1 aus den Formeln verschwinden, ist die Abbildung punktförmig. Nur sind die Axenabstände der Bildpunkte denen der Objektpunkte nicht genau proportional. Es findet „Verzeichnung" statt.

$$23)\quad \text{c) } F \gtrless 0 \qquad \begin{aligned} \Delta y_1 &= -Fy_0\sigma^2(1+2\cos^2\varphi) = -Fy_0\sigma^2(2+\cos 2\varphi), \\ \Delta z_1 &= -Fy_0\sigma^2\sin 2\varphi. \end{aligned}$$

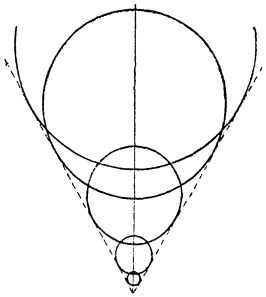

Fig. 3.

Die Aberrationskurven, die bei festgehaltenem Objektpunkt y_0 für die verschiedenen einfallenden Strahlenkegel (veränderliches σ) entstehen, sind Kreise, welche zwei unter einem Winkel von 30° gegen die y-Axe vom Gauss'schen Bildpunkt ausgehende Gerade berühren. Dieser Fehler heisst wegen des unsymmetrischen geschwänzten Aussehens, das er den Bildern giebt, die „Koma".

d) die beiden Fehler C und D betrachtet man am besten gemeinsam.

$$24)\qquad C \gtrless 0,\ D \gtrless 0 \qquad \begin{aligned} y_1 - y_0 &= (2C+D)\, y_0^2 \sigma \cos\varphi\,, \\ z_1 &= \qquad D\, y_0^2 \sigma \sin\varphi. \end{aligned}$$

Sie sind auf Astigmatismus und Bildwölbung zurückzuführen. Das eintretende Strahlenbüschel, welches wir für den Augenblick als sehr dünn betrachten wollen, hat, wie bekanntlich jedes dünne Strahlenbüschel, zwei Brennlinien, von denen die eine radial oder, wie man sagt, sagittal zur Axe des Instruments gerichtet ist, während die andere tangential zu einem Kreise liegt, dessen Mittelpunkt in der optischen Axe, dessen Ebene senkrecht zur optischen Axe steht. Die beiden Flächen, welche diese beiden Brennlinien durchlaufen, wenn man das Objekt in der Objektebene verschiebt, heissen „tangentiale" und „sagittale" „Bildflächen". Man kann beide Flächen in erster Näherung ersetzen durch die in der Axe berührenden Krümmungskugeln, welche die Radien ϱ_s und ϱ_t haben mögen. Man zähle ϱ_s und ϱ_t positiv, wenn der Kugelmittelpunkt im Sinne der Lichtbewegung vor der Bildebene liegt. Man sieht ohne weiteres, dass einer solchen Krümmung der Bildflächen die folgenden Verschiebungen des Strahlschnittpunktes in der Bildebene entsprechen:

$$\Delta Y_1 = \frac{Y_1^2}{2\varrho_t} \cdot \frac{Y_1'}{M_1}, \qquad \Delta Z_1 = \frac{Y_1^2}{2\varrho_s}\, \frac{Z_1'}{M_1}.$$

Führt man die Seidel'schen Variabeln ein, so findet man:

$$\Delta y_1 = \frac{y_1^2 \eta_1}{2\varrho_t n_1}, \qquad \Delta z_1 = \frac{y_1^2 \zeta_1}{2\varrho_s n_1}.$$

Erlaubt man sich hier noch y_1 mit y_0 zu vertauschen, so erhält man durch Vergleich mit (24):

$$\frac{1}{\varrho_t} = 2n_1(2C+D), \qquad \frac{1}{\varrho_s} = 2n_1 D.$$

Man wird demnach passend $2C+D$ als tangentiale und D als sagitiale Bildwölbung bezeichnen. Die halbe Differenz beider Krümmungen:

$$25)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_t} - \frac{1}{\varrho_s}\right) = 2n_1 C$$

bezeichnet man als Astigmatismus. Die halbe Summe:

$$26)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_s} + \frac{1}{\varrho_t}\right) = 2n_1(C+D)$$

wird schlechthin „Bildwölbung" genannt. In der Tat wird bei Verschwinden aller übrigen Fehler eine Kugel vom Radius ϱ, welche die Bildebene in der Axe berührt, der Ort des scharfen Bildes der Objektebene sein.

10. Die numerische Grösse der Fehler. Setzt man die willkürliche Grösse $\lambda_0 = 1$ und setzt ferner voraus, dass Anfangs- und Endmedium den Brechungsindex $n_0 = n_1 = 1$ haben, so hat man nach 7):

$$y_0 = \frac{Y_0}{M_0}, \qquad \eta_1 = \frac{Y_1'}{\lambda_1} = \sigma \cos \varphi,$$

$$z_0 = \frac{Z_0}{M_0}, \qquad \zeta_1 = \frac{Z_1'}{\lambda_1} = \sigma \sin \varphi.$$

Man sieht, dass y_0 und z_0 nichts anderes sind, als die Winkelabstände des Objekts von der Axe, gesehen von der Mitte der Eintrittspupille aus, und zwar genauer die Tangenten der Abstandswinkel, dass auf der andern Seite η_1 und ζ_1 bis auf den Faktor λ_1 mit den Coordinaten in der Austrittspupille übereinstimmen.

Indem wir, wie bisher, $z_0 = 0$ setzen, wollen wir die Bezeichnungen einführen:

20a) $$y_0 = g \cdot \operatorname{tg} 3^0, \qquad \frac{\lambda_1 \sigma}{M_1} = \frac{v}{20}.$$

Dabei soll g an „Grösse des Gesichtsfelds“ erinnern, insofern man das doppelte des grössten zulässigen Abstandes des Objektes von der Axe als Grösse des Gesichtsfelds bezeichnet. Ebenso erinnere v an „Oeffnungsverhältnis“. Da nämlich M_1 den Abstand zwischen Austrittspupille und Bildebene bedeutet, ist $\frac{\lambda_1 \sigma}{M_1}$ die Tangente des Oeffnungswinkels des austretenden Strahlenbüschels, wenn man für σ den grössten zulässigen Wert, d. i. den Radius der kreisförmig gedachten Austrittspupille einsetzt, und das doppelte dieser Grösse pflegt man als „Oeffnungsverhältnis“ zu bezeichnen. Die Faktoren tg 3^0 und $\frac{1}{20}$ sind hinzugefügt, damit für die in Praxis häufigsten Oeffnungsverhältnisse und Gesichtsfelddurchmesser g und v handliche Zahlen bleiben.

Die im Vorhergehenden abgeleiteten Correktionen Δy und Δz sind nach der Festsetzung $\lambda_0 = 1$ sehr nahe die Aenderungen der Schnittkoordinaten der Strahlen mit der Bildebene, ausgedrückt in dem Bogenmass, das ihnen in dem von der Mitte der Eintrittspupille aus gesehenen Objekt entspricht. Dividiert man dieselben daher durch arc 1″, so erhält man die Fehler der optischen Abbildung unmittelbar in ihrem auf das Objekt zurückprojizierten Wert in Bogensekunden.

Führt man die Bezeichnungen (20a) in den Formeln (21) bis (24) ein und dividiert durch arc 1″, so empfiehlt sich folgende Abtrennung. Man setze:

$$B' = \frac{2\,B\,M_1^3}{\lambda_1^3 \cdot 20^3 \cdot \text{arc}\,1''} = B\,\frac{M_1^2}{\lambda_1^3} \cdot \overline{1{,}71237} = 51''{,}566 \cdot B\,\frac{M_1^3}{\lambda_1^3}$$

$$C' = \frac{2\,C\,M_1}{\lambda_1 \cdot 20 \cdot \text{arc}\,1''}(\text{tg}\,3^0)^2 = C\,\frac{M_1}{\lambda_1} \cdot \overline{1{,}75323} = 56{,}654 \cdot C\,\frac{M_1}{\lambda_1}$$

21a) $$D' = \frac{2\,D\,M_1}{\lambda_1 \cdot 20 \cdot \text{arc}\,1''}(\text{tg}\,3^0)^2 = D \cdot \frac{M_1}{\chi_1} \cdot \overline{1{,}75323} = 56{,}654\;\; D\,\frac{M_1}{\lambda_1}$$

$$E' = \frac{E\,(\text{tg}\,3^0)^3}{\text{arc}\,1''} = E \quad \cdot \overline{1{,}47263} = 29{,}692\;\; E$$

$$F' = \frac{3\,F\,M_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \frac{\text{tg}\,3^0}{20^2\,\text{arc}\,1''} = F \cdot \frac{M_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \overline{1{,}90889} = 81{,}076\;\; F\frac{M_1^2}{\lambda_1^2}$$

und bezeichne die Grössen $B' \ldots F'$ als die numerischen Fehler des Systems.

Dann ist in Bogensekunden:

$B' \,.\, v^3$ der Durchmesser des Zerstreuungskreises der sphär. Aberration
$E' \,.\, g^3$ die Verzeichnung
21b) $F' \,.\, gv^2$ die radiale Erstreckung der Coma (die tangentiale Erstreckung beträgt $^2/_3$ der radialen)
$(2C' + D')g^2v$ die radiale } Axe der durch Astigmatismus und Bildwölbung
$D' . g^2v$ die tangentiale } erzeugten Ellipse.

Diese Grössen werde ich späterhin (abgesehn von der Verzeichnung) als die durch die einzelnen Fehler hervorgerufenen Streuungen bezeichnen.

Im Falle das Objekt in's Unendliche rückt, gewinnt der Faktor $\frac{M_1}{\lambda_1}$ eine besonders einfache Bedeutung. Es ist allgemein:

$$Y_1 = \frac{l_1}{l_0} \cdot Y_0 = M_0 \cdot \frac{l_1}{l_0} \cdot \frac{Y_0}{M_0}$$

oder nach (8) für $n_0 = n_1 = \lambda_0 = 1$:

$$Y_1 = \frac{Y_0}{M_0} \cdot \frac{M_1}{\lambda_1}.$$

Nun ist $\frac{Y_0}{M_0}$, wie erwähnt, die scheinbare Grösse des Objekts, Y_1 die Grösse des Bildes. Der Proportionalitätsfaktor giebt also für unendlich entferntes Objekt die Brennweite f des Instrumentes an, wobei allerdings noch das negative Zeichen einzuführen ist, da mit positiver Brennweite Bildumkehrung verbunden ist. Daher folgt die Beziehung:

21c) $$\frac{M_1}{\lambda_1} = -f \cdot$$

In Bezug auf die Vorzeichen lässt sich ferner aus den Formeln der vorigen Nummer das folgende ablesen:

Positives B' bedeutet kürzere Vereinigungsweite der Randstrahlen, verglichen mit den Mittelstrahlen (sog. „Unterkorrektion" der sphärischen Aberration).

Positives E' bedeutet Zusammendrängung der äusseren Partien des Objekts (sog. tonnenförmige Verzeichnung, weil ein Quadrat sich mit tonnenförmig ausgewölbten Seiten abbildet), negatives E' liefert die sogenannte kissenförmige Verzeichnung (die Ecken des Quadrats werden zu weiter von der Mitte entfernten Zipfeln).

Positives F' bedeutet axenwärts gerichtete Coma.

Positives $2C' + D'$ bedeutet Lage der tangentialen Bildfläche hinter der Gauss'schen Bildebene,

Positives D' bedeutet Lage der sagittalen Bildfläche hinter der Gauss'schen Bildebene.

11. Einfluss der Blendenstellung. Einer sehr einfachen Behandlung ist die Frage nach dem Einfluss der Blendenstellung fähig, wenn man von dem Eikonal Gebrauch macht. Wir dachten uns die Begrenzung der wirksamen Oeffnung des Instruments durch die Eintrittspupille (oder irgend ein von ihr durch einen Teil des optischen Systems entworfenes Bild) erfolgend. Die Eintrittspupille war durch ihren Abstand M_0 von der Objektebene festgelegt. Es möge nun die Eintrittspupille in den Abstand $\overline{M}_0$ von der Objektebene verschoben werden. Dadurch nehmen alle von der Lage der Eintrittspupille abhängigen Grössen, wie das Vergrösserungsverhältnis $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ zwischen Austritts- und Eintrittspupille und die ganzen Seidel'schen Variablen neue Werte an, die durch einen Querstrich bezeichnet werden sollen.

Den Gleichungen (7) (ich lasse die analogen Beziehungen für die z-Coordinate weg):

$$y_0 = \frac{n_0\lambda_0}{M_0} \cdot Y_0, \qquad \eta_0 = \frac{Y_0}{\lambda_0} + \frac{M_0}{\lambda_0} p_0,$$

$$y_1 = \frac{n_1\lambda_1}{M_1} \cdot Y_1, \qquad \eta_1 = \frac{Y_1}{\lambda_1} + \frac{M_1}{\lambda_1} p_1$$

treten die Gleichungen gegenüber:

$$\bar{y}_0 = \frac{n_0\bar{\lambda}_0}{\bar{M}_0} Y_0, \qquad \bar{\eta}_0 = \frac{Y_0}{\bar{\lambda}_0} + \frac{\bar{M}_0}{\bar{\lambda}_0} p_0$$

$$\bar{y}_1 = \frac{n_1\bar{\lambda}_1}{\bar{M}_1} Y_1, \qquad \bar{\eta}_1 = \frac{Y_1}{\bar{\lambda}_1} + \frac{\bar{M}_1}{\bar{\lambda}_1} p_1$$

woraus sich die Beziehungen zwischen den alten und den neuen Seidel'schen Variabeln ergeben:

$$y_0 = \bar{y}_0 \frac{\lambda_0}{\bar{\lambda}_0} \frac{\bar{M}_0}{M_0} \qquad \eta_0 = \bar{\eta}_0 \cdot \frac{\bar{\lambda}_0}{\lambda_0} \frac{M_0}{\bar{M}_0} + \bar{y}_0 \left(\frac{\bar{M}_0 - M_0}{n_0 \lambda_0 \bar{\lambda}_0} \right),$$

$$y_1 = \bar{y}_1 \cdot \frac{\lambda_1}{\bar{\lambda}_1} \frac{\bar{M}_1}{M_1}, \qquad \eta_1 = \bar{\eta}_1 \cdot \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda_1} \frac{M_1}{\bar{M}_1} + \bar{y}_1 \cdot \frac{\bar{M}_1 - M_1}{n_1 \lambda_1 \bar{\lambda}_1}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{\bar{\lambda}_0}{\lambda_0} \frac{M_0}{\bar{M}_0} = \beta, \qquad \frac{\bar{M}_0 - M_0}{n_0 \lambda_0 \bar{\lambda}_0} = \gamma,$$

so schreibt sich dies:

$$\bar{y}_0 = \beta y_0, \qquad \eta_0 = \beta \bar{\eta}_0 + \gamma \bar{y}_0,$$
$$\bar{y}_1 = \beta y_1, \qquad \eta_1 = \beta \bar{\eta}_1 + \gamma \bar{y}_1,$$

wobei bereits auf die für jedes Doppelpaar konjugierter Ebenen gültige Invariante (8) Rücksicht genommen ist.

Ersetzt man nunmehr in der Eikonalentwicklung (18) die alten Variabeln durch die neuen, so erhält man eine Entwicklung von genau derselben Form, in welcher die Coeffizienten, d. h. die der veränderten Blendenstellung entsprechenden Fehler die folgenden Werte haben:

$$\begin{aligned} \bar{B} &= B\beta^4, \\ \bar{F} &= F\beta^2 - B\beta^3\gamma, \\ \bar{C} &= C \quad - 2F\beta\gamma + B\beta^2\gamma^2, \\ \bar{D} &= D \quad - 2F\beta\gamma + B.\beta^2\gamma^2, \\ \bar{E} &= \frac{E}{\beta^2} \quad - (D + 2C)\frac{\gamma}{\beta} + 3F\gamma^2 - B\beta\gamma^3. \end{aligned} \tag{18a}$$

Dieselben sind bereits in solcher Reihenfolge angeschrieben, dass jeder Fehler von der Blendenstellung (abgesehen von einem Faktor β^4 oder $\frac{1}{\beta^2}$) unabhängig wird, sobald die sämtlichen vorausgehenden Fehler verschwinden.

Es sei insbesondere hervorgehoben, dass bei Verschwinden von sphärischer Aberration und Koma ($B = F = 0$) die Bildkrümmungen C und D von der Blendenstellung unabhängig werden.

Es ist dies Verhalten leicht verständlich daraus, dass man durch Abblenden gewisser Strahlen nur solange Einfluss auf die Form des Bildes hat, als die Strahlen nicht alle in einen Punkt zusammen laufen.

12. Die 9 Fehler 5. Ordnung eines optischen Systems. Die Ueberlegungen sind den bei der 3. Ordnung angewandten völlig analog. Der allgemeine Ausdruck von S^6 ist:

$$S^6 = S_1 R_0^3 + S_2 R_0^2 \varrho_1 + S_3 R_0^2 \varkappa_{01} + S_4 R_0 \varrho_1^2 + S_5 R_0 \varrho_1 \varkappa_{01} + S_6 R_0 \varkappa_{01}^2 + S_7 \varrho_1^3 + S_8 \varrho_1^2 \varkappa_{01} + \\ + S_9 \varrho_1 \varkappa_{01}^2 + S_{10} \varkappa_{01}^3 ,$$

wobei S_1 bis S_{10} wiederum willkürliche Constanten bedeuten. Die Differentiation gemäss den Gleichungen (12) liefert unter der Voraussetzung, dass man z_0, wie oben, gleich null setzt:

$$y_0 - y_1 = \frac{\partial S^4}{\partial \eta_1} + 2\eta_1 [S_2 y_0^4 + 2S_4 y_0^2 (\eta_1^2 + \zeta_1^2) + S_5 y_0^3 \eta_1 + 3S_7 (\eta_1^2 + \zeta_1^2)^2 + 2S_8 y_0 \eta_1 (\eta_1^2 + \zeta_1^2) \\ + S_9 y_0^2 \eta_1^2]$$

27)
$$+ y_0 [S_3 y_0^4 + S_5 y_0^2 (\eta_1^2 + \zeta_1^2) + 2S_6 y_0^3 \eta_1 + S_8 (\eta_1^2 + \zeta_1^2)^2 + 2S_9 y_0 \eta_1 (\eta_1^2 + \zeta_1^2) \\ + 3S_{10} y_0^2 \eta_1^2]$$

$$- z_1 = \frac{\partial S^4}{\partial \zeta_1} + 2\zeta_1 [S_2 y_0^4 + 2S_4 y_0^2 (\eta_1^2 + \zeta_1^2) + S_5 y_0^3 \eta_1 + 3S_7 (\eta_1^2 + \zeta_1^2)^2 + 2S_8 y_0 \eta_1 (\eta_1^2 + \zeta_1^2) \\ + S_9 y_0^2 \eta_1^2].$$

Da S_1 fortgefallen ist, giebt es im Ganzen 9 unabhängige Fehler 5. Ordnung. Ich isoliere dieselben, indem ich die jedem einzelnen entsprechenden Aberrationskurven betrachte, wobei wiederum $\eta_1 = \sigma \cos \varphi$, $\zeta_1 = \sigma \sin \varphi$ gesetzt und die entstehenden Aenderungen von y_1 und z_1 mit Δy_1 und Δz_1 bezeichnet werden. Zugleich erlaube ich mir Namen für diese Fehler vorzuschlagen. Die Fehler sind geordnet nach ihren Dimensionen in Bezug auf y_0, den Abstand des Objects von der Axe.

a) $S_7 \gtrless 0$. Sphärische Aberration zweiter Stufe.

28)
$$\Delta y_1 = -6S_7 \sigma^5 \cos \varphi$$
$$\Delta z_1 = -6S_7 \sigma^5 \sin \varphi.$$

Die Aberrationskurven sind Kreise, deren Radius unabhängig von dem Orte des Objekts ist und mit der 5. Potenz der Oeffnung des Instrumentes wächst.

b) $S_8 \gtrless 0$. Koma zweiter Stufe.

29)
$$\Delta y_1 = -S_8 y_0 \sigma^4 [1 + 4 \cos^2 \varphi]$$
$$\Delta z_1 = -S_8 y_0 \sigma^4 \cdot 4 \sin \varphi \cos \varphi.$$

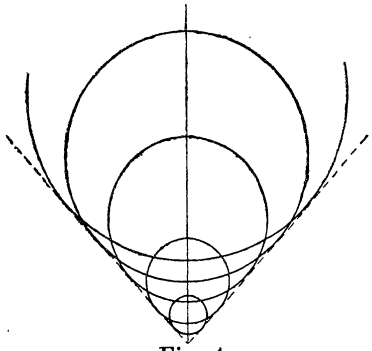

Fig. 4.

Die Aberrationskurven sind Kreise vom Radius $2S_8 y_0 \sigma^4$, welche zwei unter einem Winkel von $41{,}^\circ 8$ ($\sin 41{,}^\circ 8 = \frac{2}{3}$) gegen die y-Axe geneigte Grade berühren.

c) $S_4 \gtrless 0$. Seitliche sphärische Aberration.

30)
$$\Delta y = -4S_4 y_0^2 \sigma^3 \cos \varphi$$
$$\Delta z_1 = -4S_4 y_0^2 \sigma^3 \sin \varphi.$$

Die Aberrationskurven sind Kreise, deren Radius mit dem Quadrat des Axenabstands und der dritten Potenz der Oeffnung wächst.

d) $S_9 \gtrless 0$. Flügelfehler.

31)
$$\Delta y_1 = -2S_9 y_0^2 \sigma_1^3 \cos\varphi (1+\cos^2\varphi)$$
$$\Delta z_1 = -2S_9 y_0^2 \sigma_1^3 \cos^2\varphi \sin\varphi.$$

Fig. 5.

Die Aberrationskurven werden Kurven 6. Ordnung von der beistehenden Flügelform. Die Kurven, die zu demselben Objektpunkt gehören, haben denselben Knotenpunkt und unterscheiden sich nur durch ihre Dimension.

e) $S_{10} \gtrless 0$. Pfeilfehler.

32)
$$\Delta y_1 = -3S_{10} y_0^3 \sigma^2 \cos^2\varphi$$
$$\Delta z_1 = 0.$$

Die Aberrationskurve besteht aus einem geraden Strich, der sich von dem Gauss'schen Bildpunkt aus nach einer Seite zu erstreckt.

f) $S_5 \gtrless 0$. Seitliche Koma.

33)
$$\Delta y_1 = -S_5 y_0^3 \sigma^2 (1+2\cos^2\varphi)$$
$$\Delta z_1 = -S_5 y_0^3 \sigma^2\, 2 \sin\varphi \cos\varphi.$$

Die Aberrationskurven haben dieselbe Form, wie bei der gewöhnlichen Koma (F in No. 9); nur wachsen ihre Dimensionen mit der dritten Potenz des Achsenabstandes.

g) $S_2 \gtrless 0$ und $S_6 \gtrless 0$. Seitliche Bildwölbungen.

34)
$$\Delta y_1 = -2(S_2+S_6) y_0^4 \sigma \cos\varphi$$
$$\Delta z_1 = -2\, S_2 \qquad y_0^4 \sigma \sin\varphi.$$

Wir nehmen diese beiden Fehler zusammen, wie oben die Bildwölbung und den Astigmatismus. Die Aberrationskurven sind Ellipsen. Die halbe Differenz der beiden Axen S_6 wird man passend als seitlichen Astigmatismus, die halbe Summe $2S_2+S_6$ als seitliche Bildwölbung bezeichnen.

h) $S_3 \gtrless 0$. Seitliche Verzeichnung.

35)
$$\Delta y_1 = -S_3 y_0^5$$
$$\Delta z_1 = 0.$$

Dieser Fehler stört die punktförmige Abbildung nicht, er ändert nur die Verzeichnung.

13. Anmerkung über die Fehler in aplanatischen Punktepaaren. Wird der Punkt $y_0 = z_0 = 0$ stigmatisch in den Punkt $y_1 = z_1 = 0$ abgebildet, so besagt das, dass alle vom Ort des Objekts unabhängigen Fehler, also die sphärischen Aberrationen erster und zweiter Stufe B und S_7 verschwinden. Ist dazu noch die Sinusbedingung erfüllt, so verschwinden auch die der ersten Potenz von y_0 proportionalen Fehler F und S_8, weil dann die Abbildung unter Vernachlässigung höherer Potenzen von y_0 scharf sein muss. Die Existenz eines aplanatischen Punktepaares bedingt also die Freiheit des Systems von den Fehlern der sphär. Aberration und der Koma 1. und 2. Stufe.

§ 5. Die Zusammensetzung mehrerer optischer Systeme.

14. Giebt die Eikonaltheorie ohne weiteres einen Ueberblick über die Zahl und Art der möglichen Fehler eines optischen Systems, so bleibt nun noch die bei weitem schwierigere Aufgabe, das Eikonal für ein gegebenes optisches System wirklich auszurechnen und daraus die Grösse der Fehler selbst abzuleiten. Der erste Teil der Aufgabe wird sein, das Eikonal einer einzelnen spiegelnden oder brechenden Fläche auszurechnen, der zweite Teil besteht in der Zusammensetzung beliebig vieler solcher Einzelsysteme. Wir behandeln zunächst die zweite Aufgabe, indem wir uns auf die Zusammensetzung zweier Systeme beschränken. Die Systeme werden immer koaxial vorausgesetzt.

Man bilde die Ebenen $x = c_1$ und $x = c_1 + M_1$ nach Gauss durch das zweite System in zwei Ebenen ab, die durch $x = c_2$ und $x = c_2 + M_2$ gegeben werden mögen und die offenbar die Bildebene und die Austrittspupille des ganzen Systems darstellen. Das Winkeleikonal des ersten Systems sei:

$$W_1 = W_1(p_0, q_0, p_1, q_1),$$

das des zweiten in analoger Bezeichnung:

$$W_2 = W_2(p_1, q_1, p_2, q_2).$$

Das Winkeleikonal des Gesamtsystems besteht nach der geometrischen Bedeutung von W aus der Summe dieser beiden Grössen:

$$W = W_1 + W_2, \tag{36}$$

wobei das Problem darin liegt, p_1, q_1 durch p_0, q_0, p_2, q_2 auszudrücken und so W als Funktion der letzteren 4 Variabeln darzustellen.

Diese „Elimination der Zwischenvariabeln“ soll indessen nicht an W, sondern an dem Seidel'schen Eikonal ausgeführt werden, wo sie ausserordentlich viel leichter zu bewerkstelligen ist, sobald man wenigstens von Reihenentwicklungen Gebrauch macht.

Man hat nach 10):

$$S_1 = W_1 + \frac{M_0}{n_0}\frac{y_0^2+z_0^2}{2\lambda_0^2} - \frac{M_1}{n_1}\frac{y_1^2+z_1^2}{2\lambda_1^2} + y_0(\eta_1-\eta_0) + z_0(\zeta_1-\zeta_0).$$

Entsprechend:

$$S_2 = W_2 + \frac{M_1}{n_1}\frac{y_1^2+z_1^2}{2\lambda_1^2} - \frac{M_2}{n_2}\frac{y_2^2+z_2^2}{2\lambda_2^2} + y_1(\eta_2-\eta_1) + z_1(\zeta_2-\zeta_1)$$

und für das Gesamtsystem:

$$S = W + \frac{M_0}{n_0}\frac{y_0^2+z_0^2}{2\lambda_0^2} - \frac{M_2}{n_2}\frac{y_2^2+z_2^2}{2\lambda_2^2} + y_0(\eta_2-\eta_0) + z_0(\zeta_2-\zeta_0),$$

mithin nach (36):

$$S = S_1 + S_2 + (y_0-y_1)(\eta_2-\eta_1) + (z_0-z_1)(\zeta_2-\zeta_1)$$

oder auch nach (12):

$$S = S_1 + S_2 + \frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\cdot\frac{\partial S_2}{\partial y_1} + \frac{\partial S_1}{\partial \zeta_1}\cdot\frac{\partial S_2}{\partial z_1}. \tag{37}$$

Es erübrigt, hier y_1, z_1, η_1, ζ_1 durch y_0, z_0, η_2, ζ_2 auszudrücken und S als Funktion der vier letzteren Variabeln zu finden.

Wir führen jetzt Reihenentwicklungen ein und beschränken uns darauf, Glieder von 6. Ordnung in S mitzunehmen. Teilt man S_1 und S_2 in ihre Terme verschiedener Ordnung ab, so werden die Terme von S bis zur 6. Ordnung inklusive:

$$S = S_1^4 + S_2^4 + S_1^6 + S_2^6 + \frac{\partial S_1^4}{\partial \eta_1}\cdot\frac{\partial S_2^4}{\partial y_1} + \frac{\partial S_1^4}{\partial \zeta_1}\cdot\frac{\partial S_2^4}{\partial z_1}.$$

In den vier letzten Gliedern dieses Ausdrucks darf man ohne weiteres $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$, $\eta_1 = \eta_2$, $\zeta_1 = \zeta_2$ setzen, da hier die Berücksichtigung der Unterschiede dieser Grössen nur Terme 8. Ordnung erzeugen würde. Anders in den beiden ersten Termen S_1^4 und S_2^4. Es ist:

$$S_1^4(y_0, z_0, \eta_1, \zeta_1) = S_1^4\left((y_0, z_0, \eta_2 - \frac{\partial S_2}{\partial y_1}, \zeta_2 - \frac{\partial S_2}{\partial z_1}\right)$$

oder bis zur 6. Ordnung genau entwickelt:

$$S_1^4(y_0, z_0, \eta_1, \zeta_1) = S_1^4(y_0, z_0, \eta_2, \zeta_2) - \frac{\partial S_1^4}{\partial \eta_1}\cdot\frac{\partial S_2^4}{\partial y_1} - \frac{\partial S_1^4}{\partial \zeta_1}\cdot\frac{\partial S_2^4}{\partial z_1}$$

und entsprechend:

$$S_2^4(y_1, z_1, \eta_2, \zeta_2,) = S_2^4(y_0, z_0, \eta_2, \zeta_2) - \frac{\partial S_1^4}{\partial \eta_1}\cdot\frac{\partial S_2^4}{\partial y_1} - \frac{\partial S_1^4}{\partial \zeta_1}\cdot\frac{\partial S_2^4}{\partial z_1}.$$

Wenn wir jetzt durch einen Querstrich bezeichnen, dass wir in einer Funktion

y_1, z_1 durch y_0, z_0 und η_1, ζ_1 durch η_2, ζ_2 ersetzt haben, so erhalten wir für die Terme 4. und 6. Ordnung von S:

38) $$S^4 = \overline{S}_1^4 + \overline{S}_2^4$$

39) $$S^6 = \overline{S}_1^6 + \overline{S}_2^6 - \frac{\partial \overline{S}_1^4}{\partial \eta_2} \cdot \frac{\partial \overline{S}_2^4}{\partial y_0} - \frac{\partial \overline{S}_1^4}{\partial \zeta_2} \cdot \frac{\partial \overline{S}_2^4}{\partial z_0}.$$

Damit ist die Elimination der Zwischen-Variabeln mit der beabsichtigten Genauigkeit ausgeführt und der Ausdruck des Gesamteikonals gefunden.

Um uns die Bedeutung der Formel (38) völlig zu vergegenwärtigen, wollen wir die in ihr enthaltenen Regeln explizite ausführen. Wir haben nach (18), indem wir überall den Index 1 anfügen:

$$S_1^4 = -\frac{A_1}{4} R_0^2 - \frac{B_1}{4} \varrho_1^2 - C_1 \varkappa_{01}^2 - \frac{D_1}{2} R_0 \varrho_1 + E_1 R_0 \varkappa_{01} + F_1 \varrho_1 \varkappa_{01},$$

$$R_0 = y_0^2 + z_0^2, \quad \varrho_1 = \eta_1^2 + \zeta_1^2, \quad \varkappa_{01} = y_0 \eta_1 + z_0 \zeta_1.$$

Analog wird sein:

$$S_2^4 = -\frac{A_2}{4} R_1^2 - \frac{B_2}{4} \varrho_2^2 - C_2 \varkappa_{12}^2 - \frac{D_2}{2} R_1 \varrho_2 + E_2 R_1 \varkappa_{12} + F_2 \varrho_2 \varkappa_{12},$$

$$R_1 = y_1^2 + z_1^2, \quad \varrho_2 = \eta_2^2 + \zeta_2^2, \quad \varkappa_{12} = y_1 \eta_2 + z_1 \zeta_2.$$

Ersetzt man hier y_1, z_1 durch y_0, z_0 und η_1, ζ_1 durch η_2, ζ_2 und führt die Bezeichnung ein:

$$\varkappa_{02} = y_0 \eta_2 + z_0 \zeta_2,$$

so erhält man:

$$S^4 = -\frac{A_1 + A_2}{4} R_0^2 - \frac{B_1 + B_2}{4} \varrho_2^2 - (C_1 + C_2) \varkappa_{02}^2 - \frac{D_1 + D_2}{2} R_0 \varrho_2 + (E_1 + E_2) R_0 \varkappa_{02} + \\ + (F_1 + F_2) \varrho_2 \varkappa_{02}.$$

Diese Gleichung besagt aber: die Fehler 3. Ordnung eines Gesamtsystems setzen sich aus den Fehlern der Einzelsysteme additiv zusammen.

Wenn sich ein so einfaches Resultat ergeben hat, so liegt dies allein an der Benutzung der Seidel'schen Variabeln und der Definition der einzelnen Bildfehler durch die Coeffizienten der Eikonalentwicklung grade nach diesen Variabeln. Sowie man zu anderen von System zu System wechselnden linearen Combinationen der Seidel'schen Variabeln übergeht, erhält man für jeden Entwicklungskoeffizienten des zusammengesetzten Eikonals eine umständliche lineare Funktion sämtlicher Fehler der Einzeleikonale. Hier ist also der Punkt, wo der Vorteil der Seidel'schen Variabeln hauptsächlich zur Geltung kommt.

Die Formel (39) lehrt, dass die Fehler 5. Ordnung zwar nicht direct einer additiven Regel unterliegen, dass sich ihre Zusammensetzung aber recht wohl übersehen lässt.

Der Uebergang von der Zusammensetzung zweier Flächen zu beliebig vielen ergiebt sich so unmittelbar, dass ein Anschreiben der entstehenden Summenformeln wohl überflüssig ist.

§ 6. Die Fehler dritter Ordnung eines centrierten Linsensystems. Die Seidel'schen Formeln.

15. Wir führen zum Schluss die Berechnung des Eikonals 4. Ordnung S^4 für ein centriertes Linsensystem vollständig aus, wobei wir ohne Mühe auch Abweichungen der Flächen von der Kugelform mitberücksichtigen können.

Wir betrachten zunächst die Brechung an einer einzelnen Fläche. Die Brechungsindices zu beiden Seiten derselben seien n_0 und n_1. Die x-Axe werde im Sinne der Lichtbewegung positiv gezählt. Ist die brechende Fläche sphärisch, so lautet ihre Gleichung:

$$X - a = r - \sqrt{r^2 - Y^2 - Z^2},$$

wobei a die Abscisse des Scheitels, r der Radius ist und positives r einer gegen das einfallende Licht konvexen Fläche entspricht.

Bis zu Gliedern vierter Ordnung entwickelt gilt:

$$X = a + \frac{Y^2 + Z^2}{2r} + \frac{(Y^2 + Z^2)^2}{8r^3}.$$

Indem wir der Fläche eine beliebige nichtsphärische Rotationsform zuschreiben, setzen wir bis auf Glieder 4. Ordnung genau:

$$X = a + \frac{Y^2 + Z^2}{2r} + \frac{(Y^2 + Z^2)^2}{8r^3}(1 + b), \tag{40}$$

wobei man b als „Deformation" der Fläche bezeichnen kann.

Für die Abstände der vier Ebenen $X = c_0$, c_1, $c_0 + M_0$ und $c_1 + M_1$ vom Flächenscheitel führe man die Abkürzungen ein:

$$s = a - c_0, \qquad s' = a - c_1, \qquad t = a - c_0 - M_0, \qquad t' = a - c_1 - M_1, \tag{41}$$

dann gilt nach den bekannten Formeln der Gauss'schen Dioptrik auf Grund der konjugierten Lage von Objekt- und Bildebene, Eintritts- und Austrittspupille:

$$\begin{aligned} n_0\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{r}\right) &= n_1\left(\frac{1}{s'} + \frac{1}{r}\right) = K, \\ n_0\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{r}\right) &= n_1\left(\frac{1}{t'} + \frac{1}{r}\right) = L. \end{aligned} \tag{42}$$

K und L stellen zwei bei der Brechung invariante Grössen dar, die man als Abbe'sche Invarianten bezeichnet.

Die Vergrösserungen zwischen beiden Ebenenpaaren werden, da die Bilder vom Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche aus gesehn perspektivisch liegen:

$$43)\qquad \frac{l_1}{l_0} = \frac{s'+r}{s+r} = \frac{n_0 s'}{n_1 s}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{t'+r}{t+r} = \frac{n_0 t'}{n_1 t}.$$

Wir bilden jetzt das Winkeleikonal dieser brechenden Fläche, indem wir von den Punkten $x = c_0$ und $x = c_1$ auf der Axe die Normalen $c_0 N_0$ und $c_1 N_1$ auf die Richtungen des einfallenden und gebrochenen Strahls fällen, und den Ausdruck berechnen:

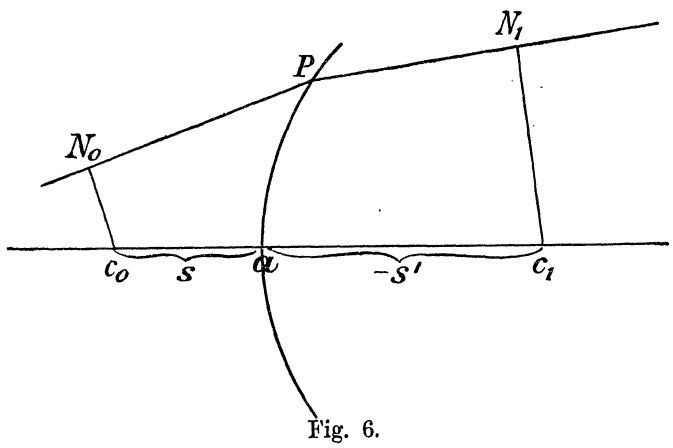

Fig. 6.

$$W = n_0 \cdot N_0 P + n_1 \cdot P N_1,$$

wobei noch P den Schnittpunkt des Strahls mit der brechenden Fläche bedeutet, dessen Coordinaten X, Y, Z sind. Sind $m_0, p_0, q_0, m_1, p_1, q_1$, wie oben, die Richtungskosinus des Strahls vor und nach der Brechung, so ist hiernach:

$$44)\qquad W = n_0[(X-c_0)m_0 + Yp_0 + Zq_0] - n_1[(X-c_1)m_1 + Yp_1 + Zq_1].$$

Ersetzt man m durch $\sqrt{1-p^2-q^2}$, X durch seinen Ausdruck (40) als Funktion von Y und Z und entwickelt bis zu Gliedern 4. Ordnung, so erhält man:

$$45)\qquad \begin{aligned} W = {} & n_0 s - n_1 s' \\ & + n_0\left[Yp_0 + Zq_0 + \frac{Y^2+Z^2}{2r} - \frac{s}{2}(p_0^2+q_0^2) + (Y^2+Z^2)^2\frac{(1+b)}{8r^3} - \frac{(Y^2+Z^2)(p_0^2+q_0^2)}{4r} - s\frac{(p_0^2+q_0^2)^2}{8}\right] \\ & - n_1\left[Yp_1 + Zq_1 + \frac{Y^2+Z^2}{2r} - \frac{s'}{2}(p_1^2+q_1^2) + (Y^2+Z^2)^2\frac{(1+b)}{8r^3} - \frac{(Y^2+Z^2)(p_1^2+q_1^2)}{4r} - s'\frac{(p_1^2+q_1^2)^2}{8}\right], \end{aligned}$$

Der nächste Schritt ist nun, Y und Z aus diesem Ausdrucke zu eliminieren, um W als Funktion nur von p_0, q_0, p_1, q_1 zu erhalten. Innerhalb der Genauigkeit der Gauss'schen Dioptrik erhält man aus dem Snellius'schen Brechungsgesetz sofort:

$$46)\qquad \begin{aligned} Y\,\frac{n_1-n_0}{r} &= n_0 p_0 - n_1 p_1, \\ Z\,\frac{n_1-n_0}{r} &= n_0 q_0 - n_1 q_1. \end{aligned}$$

Bei strenger Rechnung würden hier noch Glieder 3. Ordnung hinzukommen, in-

dessen erkennt man es als überflüssig, dieselben abzuleiten, wenn man sich der Minimaleigenschaft von W erinnert. Letztere hat zur Folge, dass kleine Aenderungen von Y und Z nur quadratisch in W eingehn, also Korrekturen 3. Ordnung von Y und Z nur Beiträge 6. Ordnung zu W liefern. Hält man sich daher innerhalb der 4. Ordnung, so folgt, dass man in W die Ausdrücke (46) für Y und Z einsetzen darf.

Es ist weiter von dem Winkeleikonal zum Seidel'schen Eikonal überzugehn. Man hat zu diesem Zweck p und q gemäss (7a) durch die Seidel'schen Variabeln zu ersetzen und gemäss (10) einen quadratischen Ausdruck in diesen Variabeln zu W hinzuzufügen. Nun sind aber einerseits die sämtlichen Beziehungen zwischen neuen und alten Variabeln inclusive der Gleichungen (46) lineare und es ändern daher bei dem Uebergang zu den neuen Variablen die einzelnen Terme der Entwicklung (45) von W ihre Ordnung nicht. Andrerseits wissen wir, dass die Entwicklung von S mit Gliedern vierter Ordnung beginnt. Daher kann S^4 nur aus den Gliedern 4. Ordnung von W bestehn. Es gilt also:

$$\begin{aligned} S^4 = \quad & n_0\left\{(Y^2+Z^2)^2\frac{(1+b)}{8r^3}-\frac{(Y^2+Z^2)(p_0^2+q_0^2)}{4r}-s\frac{(p_0^2+q_0^2)^2}{8}\right\} \\ & -n_1\left\{(Y^2+Z^2)^2\frac{(1+b)}{8r^3}-\frac{(Y^2+Z^2)(p_1^2+q_1^2)}{4r}-s'\frac{(p_1^2+q_1^2)^2}{8}\right\}, \end{aligned}$$

was man infolge der Gleichungen (42) auch in die Form umsetzen kann:

$$47)\quad S^4=\frac{1}{8n_1s'}\left[n_1\frac{Y^2+Z^2}{r}+n_1s'(p_1^2+q_1^2)\right]^2-\frac{1}{8n_0s}\left[n_0\frac{Y^2+Z^2}{r}+n_0s(p_0^2+q_0^2)\right]^2+b\frac{(n_0-n_1)}{8r^3}(Y^2+Z^2)^2.$$

Hier darf man innerhalb der beabsichtigten Genauigkeit ohne weiteres für alle Grössen die Werte aus der Gauss'schen Dioptrik einsetzen, insbesondere also die Seidel'schen Variabeln vor und nach der Brechung nach Belieben vertauschen. Um S^4 gleich als Funktion von $y_0, z_0, \eta_1, \zeta_1$ zu erhalten, wird man demgemäss an Stelle der Gleichungen (7a) die folgenden benutzen:

$$48)\quad \begin{aligned} p_0 &= \eta_1\frac{\lambda_0}{M_0}-\frac{y_0}{n_0\lambda_0} & q_0 &= \zeta_1\frac{\lambda_0}{M_0}-\frac{z_0}{n_0\lambda_0} \\ p_1 &= \eta_1\frac{\lambda_1}{M_1}-\frac{y_0}{n_1\lambda_1} & q_1 &= \zeta_1\frac{\lambda_1}{M_1}-\frac{z_0}{n_1\lambda_1}. \end{aligned}$$

Vor dem Einsetzen dieser Werte in S^4 empfehlen sich noch kleine Umformungen. Man setze zur Abkürzung:

$$49)\quad H=\frac{t}{\lambda_0 n_0}=\frac{t'}{\lambda_1 n_1}, \qquad h=\frac{\lambda_0 s}{M_0}=\frac{\lambda_1 s'}{M_1}.$$

Dann hat man:

$$
\begin{aligned}
&p_0 = \frac{\eta_1 h}{s} - \frac{y_0 H}{t}, \qquad q_0 = \frac{\zeta_1 h}{s} - \frac{z_0 H}{t} \\
50)\quad & \\
&p_1 = \frac{\eta_1 h}{s'} - \frac{y_0 H}{t'}, \qquad q_1 = \frac{\zeta_1 h}{s'} - \frac{z_0 H}{t'},
\end{aligned}
$$

und aus (46) unter Berücksichtigung von (41)—(43):

$$
51)\qquad Y = \eta_1 h - y_0 H, \qquad Z = \zeta_1 h - z_0 H.
$$

Benutzen wir wieder die frühere Bezeichnung:

$$
y_0^2 + z_0^2 = R_0, \qquad \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \varrho_1, \qquad y_0\eta_1 + z_0\zeta_1 = \varkappa_{01},
$$

so folgt unter ständiger Benutzung der Gleichungen (42):

$$
\begin{aligned}
&Y^2 + Z^2 = H^2 R_0 - 2Hh\varkappa_{01} + h^2\varrho_1 \\
52)\quad & n_0\left(\frac{Y^2+Z^2}{r}\right) + n_0 s(p_0^2+q_0^2) = H^2 R_0\left[L-(K-L)\frac{s}{t}\right] + h^2\varrho_1 K - 2Hh\varkappa_{01}L, \\
& n_1\left(\frac{Y^2+Z^2}{r}\right) + n_1 s'(p_1^2+q_1^2) = H^2 R_0\left[L-(K-L)\frac{s'}{t'}\right] + h^2\varrho_1 K - 2Hh\varkappa_{01}L.
\end{aligned}
$$

Setzt man diese Ausdrücke in S^4 ein, so erhält man die fertige Darstellung des gesuchten Eikonals:

$$
\begin{aligned}
8S^4 = {} & + R_0^2 H^4\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1) + L^2\left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s}\right) - 2L(K-L)\left(\frac{1}{n_1 t'} - \frac{1}{n_0 t}\right) + (K-L)^2\left(\frac{s'}{n_1 t'^2} - \frac{s}{n_0 t^2}\right)\right\}, \\
& + \varrho_1^2 h^4\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1) + K^2\left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s}\right)\right\} \\
53)\quad & + 4\varkappa_{01}^2 H^2 h^2\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1) + L^2\left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s}\right)\right\} \\
& + 2R_0\varrho_1 H^2 h^2\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1) + KL\left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s}\right) - K(K-L)\left(\frac{1}{n_1 t'} - \frac{1}{n_0 t}\right)\right\} \\
& - 4R_0\varkappa_{01} H^3 h\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1) + L^2\left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s}\right) - L(K-L)\left(\frac{1}{n_1 t'} - \frac{1}{n_0 t}\right)\right\} \\
& - 4\varrho_1\varkappa_{01} H h^3\left\{\frac{b}{r^3}(n_0-n_1) + KL\left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Die Faktoren der 5 letzten Zeilen geben die Fehler dritter Ordnung bei der Abbildung durch eine einzige brechende Fläche an.

16. Wir schreiten sogleich fort zur Betrachtung einer beliebigen Zahl brechender Flächen. Alle zur i-ten Fläche gehörigen Grössen sollen den Index i erhalten. Der Wert des Brechungsexponenten nach der i-ten Fläche sei n_i. Nach

dem Satze aus § 5, dass sich die Fehler dritter Ordnung einzeln addieren, und durch Vergleich der entstehenden Eikonalentwicklung mit dem früheren allgemeinen Ansatz (18) erhält man:

$$B = \tfrac{1}{2} \sum_i h_i^4 \left\{ \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + K_i^2 \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) \right\}$$

$$C = \tfrac{1}{2} \sum_i H_i^2 h_i^2 \left\{ \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + L_i^2 \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) \right\}$$

$$54)\quad D = \tfrac{1}{2} \sum_i H_i^2 h_i^2 \left\{ \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + K_i L_i \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) - K_i (K_i - L_i) \left(\frac{1}{n_{i-1} t_i} - \frac{1}{n_i t_i'} \right) \right\}$$

$$E = \tfrac{1}{2} \sum_i H_i^3 h_i \left\{ \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + L_i^2 \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) - L_i (K_i - L_i) \left(\frac{1}{n_{i-1} t_i} - \frac{1}{n_i t_i'} \right) \right\}$$

$$F = \tfrac{1}{2} \sum_i H_i h_i^3 \left\{ \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + K_i L_i \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) \right\}.$$

Das sind die Seidel'schen Formeln für die Fehler 3. Ordnung eines beliebigen centrierten Linsensystems[1]). Sie gestatten in sehr einfacher Weise diese Fehler zu berechnen, sobald einmal alle Grössen, die bei der Gauss'schen Abbildung in dem Linsensystem in Betracht kommen, bekannt sind. Die früheren auf letztere bezüglichen Formeln seien hier auch nochmals mit einer kleinen Umstellung und in verallgemeinerter Bezeichnung zusammengestellt, dabei werde zugleich die bisher willkürliche Grösse $\lambda_0 = 1$ gesetzt.

$$55)\quad n_{i-1}\left(\frac{1}{s_i} + \frac{1}{r_i}\right) = n_i\left(\frac{1}{s_i'} + \frac{1}{r_i}\right) = K_i, \qquad n_{i-1}\left(\frac{1}{t_i} + \frac{1}{r_i}\right) = n_i\left(\frac{1}{t_i'} + \frac{1}{r_i}\right) = L_i.$$

$$56)\quad H_1 = \frac{t_1}{n_0},\ h_1 = \frac{s_1}{s_1 - t_1},\ \frac{H_{i+1}}{H_i} = \frac{t_{i+1}}{t_i'},\ \frac{h_{i+1}}{h_i} = \frac{s_{i+1}}{s_i'},\ H_i h_i = \frac{s_i t_i}{n_{i-1}(s_i - t_i)}.$$

Bezeichnet man schliesslich mit d_i den Abstand des Scheitels der $i+1$-ten von dem der i-ten Fläche, so hat man:

$$57)\quad d_i = s_{i+1} - s_i' = t_{i+1} - t_i'.$$

Ist ein Linsensystem durch die Brechungsexponenten n_i, die Radien r_i, die Abstände d_i und die Deformationen b_i gegeben und sind Objektebene und Eintrittspupille durch Angabe ihrer Abstände vom ersten Scheitel s_1 und t_1 festgelegt, so kann man nach den Formeln (55)—(57) der Reihe nach alle in den Seidel'schen Formeln vorkommenden Grössen berechnen. Innerhalb der Genauigkeit der Gauss'schen Dioptrik sind die Grössen h_i offenbar proportional

1) Der Einfluss der Deformationen ist von Seidel nicht berücksichtigt, indessen von späteren Autoren hinzugefügt worden (vgl. v. Rohr, Bie Bilderzeugung in optischen Instrumenten, Berlin 1904 pag. 338).

den Axenabständen (Höhen), in welchen die einzelnen brechenden Flächen von einem Strahl geschnitten werden, der von einem axialen Objectpunkt ausgeht. Die s_i und s_i' sind die Schnittweiten desselben Strahls. Die Grössen H_i, t_i und t_i' haben eine analoge Bedeutung für einen von der Mitte der Eintrittspupille ausgehenden Strahl. Es sind also im Ganzen zur Bildung der Fehlerausdrücke zwei Strahlen gemäss der Gauss'schen Dioptrik durch das System zu verfolgen.

Will man zu den numerischen Fehlern übergehn, so hat man mit $\frac{M_\varkappa}{\lambda_\varkappa} = \frac{s_\varkappa'}{h_\varkappa}$ ($\varkappa$ Ordnungsnummer der letzten brechenden Fläche) in der durch 21a) gegebenen Potenz zu multiplizieren und die ebenda angegebenen numerischen Faktoren hinzuzufügen.

17. Die Petzvalbedingung. In den Seidel'schen Formeln ist ein spezielles merkwürdiges Theorem enthalten, welches sich auf Astigmatismus und Bildwölbung bezieht. Die Subtraktion des Fehlers D von C giebt:

$$C - D = \tfrac{1}{2} \sum H_i^2 h_i^2 (L_i - K_i) \left\{ L_i \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) - K_i \left(\frac{1}{n_{i-1} t_i} - \frac{1}{n_i t_i'} \right) \right\}.$$

Aus (55) folgt:

$$\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} = K_i \left(\frac{1}{n_{i-1}^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) - \frac{1}{r_i} \left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i} \right),$$

$$\frac{1}{n_{i-1} t_i} - \frac{1}{n_i t_i'} = L_i \left(\frac{1}{n_{i-1}^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) - \frac{1}{r_i} \left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i} \right),$$

und damit:

$$L_i \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) - K_i \left(\frac{1}{n_{i-1} t_i} - \frac{1}{n_i t_i'} \right) = \frac{K_i - L_i}{r_i} \left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i} \right).$$

Also:

$$C - D = \tfrac{1}{2} \sum H_i^2 h_i^2 (L_i - K_i)^2 \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i-1}} \right) \frac{1}{r_i}.$$

Andrerseits folgt aber aus den Gleichungen (55) auch:

$$K_i - L_i = n_{i-1} \frac{t_i - s_i}{t_i s_i},$$

mithin in Rücksicht auf die letzte Gleichung (56)

58) $$(L_i - K_i) H_i h_i = 1$$

und damit:

$$C - D = \tfrac{1}{2} \sum_i \frac{1}{r_i} \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i-1}} \right).$$

Drückt man C und D durch die Krümmungsradien ϱ_s und ϱ_t der sagittalen und

tangentialen Bildfläche aus und setzt den Brechungsindex des letzten Mediums (n_1 der Formeln (25) und (26)) gleich 1, so erhält man:

$$\frac{1}{\varrho_t} - \frac{3}{\varrho_s} = 2 \sum_i \frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i-1}}\right). \tag{59}$$

Man findet also eine Beziehung zwischen den Krümmungsradien der beiden Bildflächen, welche nur von den Radien, nicht aber von den Abständen, der brechenden Flächen abhängt. Ist das betreffende System frei von Aberration, Koma und Astigmatismus, sodass ein scharfes Bild auf einer Fläche vom Krümmungsradius $\varrho_s = \varrho_t = \varrho$ zu Stande kommt, so giebt der Ausdruck:

$$\frac{1}{\varrho} = \sum \frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i}\right), \tag{60}$$

unmittelbar den Krümmungsradius der Fläche, auf welcher das scharfe Bild liegt. Dieser Satz heisst nach seinem Entdecker das Petzval'sche Theorem.

Unter Petzvalbedingung versteht man die Forderung:

$$0 = \sum \frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i}\right), \tag{61}$$

welche für ein von Fehlern dritter Ordnung überhaupt freies optisches System erfüllt sein muss.

18. Schlussbemerkung. Von den Seidel'schen Formeln aus kann man die eigentliche praktische Aufgabe angreifen, Linsensysteme zu berechnen, für welche ein oder mehrere Fehler dritter Ordnung verschwinden. Man sieht, dass man es dabei mit lauter rein algebraischen Problemen zu thun hat. In einer späteren Mitteilung sollen ältere und neuere Probleme dieser Art betrachtet werden.